Motivierende Einstiege im Mathematikunterricht

Peter Awecker, Innsbruck

Maria Montessori: "Erst der Hunger, dann das Essen". - Heinrich Roth in "Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens": "Das Ziel de Lehrenden muß sein, die Lernbereitschaft des Schülers zu gewinnen, mit der er schon viel, mitunter schon alles, gewonnen hat."

Martin Wagenschein, der Verfechter des exemplarischen Lehrens, schreibt dazu vom "Hunger machen nach mehr".

Zum Komplex Motiv und Motivation gibt es vielfältige Untersuchungen, eine umfangreiche Literatur und etliche theoretische Ansätze. Wenn nun auch viele theoretische Aussagen kaum Schlußfolgerungen auf schulisches Geschehen zulassen, so hat, glaube ich, doch Kurt Strunz (in "Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht") recht, der es merkwürdig findet, daß die meisten Lehrer, die ihren Schülern ja etwas beibringen wollen, zwar auf ihrem Spezialgebiet Experten sind, die Aufgabe der Motivierung aber nicht mit Hilfe eines tieferen Wissens bewältigen, sondern meist gemäß einer vorrationalen Intuition.

Definition der Motivation in Anlehnung an Heinz Heckhausen (Funk-Kolleg Pädagogische Psychologie 1):

"Es gibt nicht für jede konkrete Situation ein eigenes Motiv. Motive sind vielmehr hochgeneralisierte Wertungspositionen für einzelne "Grundsituationen". Man kann deshalb Motive auch als widerkehrende Anliegen bezeichnen." Solche Motive sind z.B.:

- das kognitive Motiv: der Wunsch nach Wissen als Selbstzweck
- das Lebenszweckmotiv: der Wunsch nach Fähigkeiten zur besseren Lebensbewältigung
- das Leistungsmotiv: der Wunsch nach Steigerung, mindestens Bewahrung des eigenen Leistungsniveaus
- das Machtmotiv: der Wunsch, über andere zu dominieren
- das Anschlußmotiv: auch als Sozialmotiv bezeichnet, Geselligkeitsbedürfnis, Hilfsbereitschaft, Geltungsbedürfnis.

In welcher Ausprägung und Gerichtetheit dieses Motivsystem vorliegt, hängt von den Besonderheiten der individuellen Motiventwicklung ab.

MOTIVE				
kognitives M. Lebenszweckm. Leistungsm. Machtm. Anschlußm. (Sozialm.)	+	situative Anregungsbedingungen	⟹	MOTIVATION

Motive führen nie unmittelbar zu Handlungen. Sie müssen erst durch ihnen entsprechende Situationsbedingungen wachgerufen und angeregt werden.

Motivfaktoren und Situationsfaktoren treten miteinander in Wechselwirkung und ergeben das, was ich als Motivation bezeichnen möchte. Motivation ist also ein situationsabhängiges und kurzfristiges Geschehen.

Es gibt auch eine andere Bedeutung für Motivation: nicht die Schüler zu motivieren, sondern einen mathematischen Satz, eine Definition, eine Hilfslinie zu motivieren, d.h. zu erklären, warum gerade dieser Satz, diese Definition oder Hilfslinie nützlich, sinnvoll oder notwendig ist. Diese Bedeutung des Begriffs Motivation werde ich im folgenden nicht benützen.

Diese Arbeit beschränkt sich auf die intrinsische, die sachimmanente Motivation. Es werden zum größten Teil nur zweckfreie Motivinhalte behandelt. Nicht besprochen werden zweckgebundene Motivinhalte, nach Gerhard Rosenfeld (in "Theorie und Praxis der Lernmotivation"), also Lernen unter dem Zweck persönlicher Vorteile (materieller Gewinn), Lernen auf Grund sozialer Identifikationen (vor allem zur Freude sozial nahestehender Personen oder auch im Zusammenhang mit Vorbildwirkungen),Lernen als Erfolgsantizipation und Mißerfolgsvermeidung (Steigerung des sozialen Ansehens, Vermeidung von Blamagen), Lernen infolge Zwang und Druck, Lernen aus Gewissenszwang, Lernen aus gesellschaftlichem Erfordernis.

Ich glaube, daß die intrinsische Motivation, also die Motivation, die von der Sache, dem Unterrichtsstoff ausgeht und den Schüler vorwiegend kognitiv anspricht, die wichtigste aller Motivationsmöglichkeiten sein sollte.

D.Raufuß:"Ich meine, daß sich allmählich die Ansicht durchgesetzt hat, daß Kinder im natürlichen Zustand ständig von Neugier brennen und daß ihr Wunsch, neue Dinge zu verstehen, fast mit der Intensität des Hungertriebes verglichen werden kann."

H.Roth:"Noch mehr als beim Tier ist von Anfang an beim Menschen eine 'Triebkraft der Neugier' zu konstatieren, die als selbständige Triebfeder und Antriebskraft für das menschliche Handeln gewertet werden darf. "Neugier" ist aber nur der vitale Ausgangspunkt. Es ist der Uranfang des Bedürfnisses nach Bewältigung der Umwelt um der Bewältigung willen. Der Antrieb ist so fundamental wie Hunger und Durst. Das Unbekannte, die erlebte Schwierigkeit, die erkannte Aufgabe zieht von selbst unsere Energie auf sich."

Wie läßt sich zweckfreie Motivation beim Einstieg wecken? Eine wichtige Rolle spielt dabei die Beschaffenheit der Probleme, der Beispiele bzw. der Fragestellungen.

I. Beschaffenheit der Probleme

Von fundamentaler Bedeutung ist das sog. "Inkongruenzprinzip":

> Die Einstiegsprobleme sollen vom bereits Vertrauten in dosiertem Maße abweichen, um "motivierende Diskrepanzerlebnisse" hervorzurufen.

Dazu D.P.Ausubel (in "Psychologie des Unterrichts":Ein gemäßigtes Ausmaß an Diskrepanz zwischen bestehendem Wissen und einer neuen Lernaufgabe ist äußerst wirksam, um Aufmerksamkeit zu mobilisieren.

Wie kann diese Diskrepanz erzeugt werden?

1. Neuigkeit, Wechsel

Wechsel der Themen (in meinem Vortrag ja eine Voraussetzung - es geht um "Einstiege"), Wechsel der Arbeitsform, Wechsel der Medien.

2. Überraschung, Verblüffung

Dem Schüler wird ein Phänomen dargeboten, das seiner aus vorhandenen Kenntnissen abgeleiteten Erwartung widerspricht.

Aufgabe 1: "Würfel von Bradley Efron"

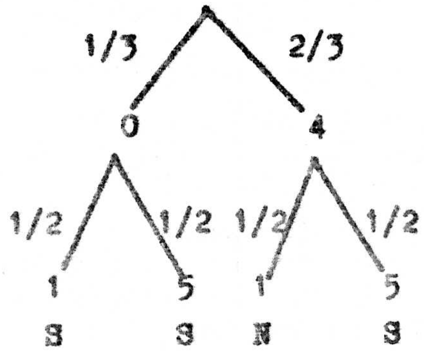
Vier verschiedenfarbige Würfel mit speziellen Zahlen:

rot:	4,4,4,4,0,0
grün:	5,5,5,1,1,1
blau:	6,6,2,2,2,2
schwarz	3,3,3,3,3,3

Spielregel: Der Spieler A wählt aus den 4 Würfeln einen beliebig aus. Aus den übrigen 3 Würfeln wählt der Spieler B einen aus. Beide Spieler würfeln (10-mal oder 20-mal). Wer die größere Augenzahl würfelt, hat jeweils gewonnen.

Durchführung im Unterricht: Der Lehrer spielt als Spieler B gegen die Schüler. Seine Strategie: Er wählt immer den Würfel, der in dem Zyklus rot, grün, blau, schwarz, rot dem folgt, den der Schüler gewählt hat. Dann beträgt seine Gewinnchance für jedes Einzelspiel: 2/3; bei 10 Spielen: 79 %, und bei 20 Spielen: 91 %.

z.B.: Schüler rot
Lehrer grün



für den Lehrer:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

oder: 36 Möglichkeiten
24 günstige Möglichkeiten

> "hat die größere Wahrscheinlichkeit zu siegen"

grün > rot, blau > grün, schwarz > blau, rot > schwarz (!!!)

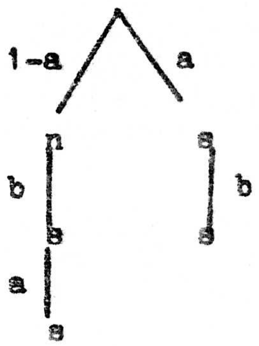
Diese Relation ist nicht transitiv!

<u>Aufgabe 2:</u> "Tennismatch" (aus "Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik 1" von A.Engel)

Ein Vater sagt zu seinem Sohn: "Du bekommst mehr Taschengeld, wenn Du von drei Tennispartien, die Du abwechselnd gegen mich und Deine Mutter spielst, zwei hintereinander gewinnst." Der Vater ist der stärkere Spieler. Soll der Junge zuerst gegen den Vater oder gegen die Mutter spielen?

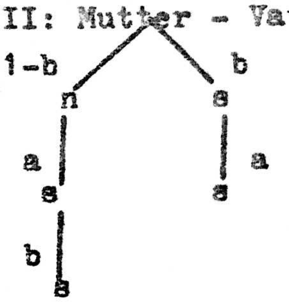
Annahme: a ... Wahrscheinlichkeit, gegen den Vater zu gewinnen
b ... Wahrscheinlichkeit, gegen die Mutter zu gewinnen
$b > a$

Alternative I: Vater - Mutter- Vater



$$p_I = (1-a).a.b + a.b = a.b.(2-a)$$

Alternative II: Mutter - Vater - Mutter



$$p_{II} = (1-b).a.\,b + a.b = a.b.(2-b)$$

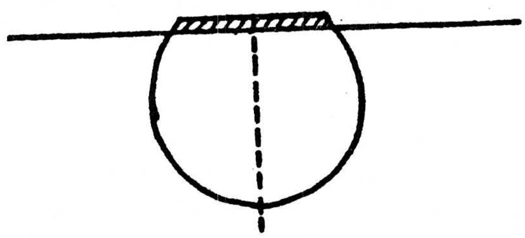
$$p_I - p_{II} = a.b.(b-a) > 0$$

Die Alternative I ist für ihn günstiger!

3. Verwirrung, Zweifel, Ungewißheit

Aufgabe 3: "Torschuß"

Skizzierung der Unterrichtseinheit: Anknüpfend an die Fußballniederlage eines prominenten Vereins erzählt man, daß der Trainer mit den Schußleistungen seiner Stürmer sehr unzufrieden ist. Es geht um die Mannschaftsaufstellung für das nächste Spiel. Der Trainer behauptet sogar: "Ihr trefft ja nicht einmal das leere Tor". Schließlich zeichnet der Trainer am Rasen die folgende Markierung:



Wie soll nun das Wettschießen organisiert werden? (Gruppenarbeit oder Diskussion)
Von wo aus soll geschossen werden?
Wovon hängt die Trefferwahrscheinlichkeit ab?
Von welchem Punkt der Markierung aus trifft man am besten?
Mögliche Antwort: Streckensymmetrale. Warum? Da ist das Tor am "größten". Gibt es ein Maß, mit dem man diesen Sachverhalt messen könnte?
Der Sehwinkel.
Um wieviel ist nun der Winkel "in der Mitte" größer als am Rand? Nach welcher Gesetzmäßigkeit nimmt der Sehwinkel ab? (Gruppenarbeit)
Es bricht die Vermutung durch: die Winkel sind ja gleich groß.
Sind sie wirklich gleich groß?
Es folgen Beweisversuche.

Dieses Beispiel eignet sich als Einstiegsbeispiel für Beweise der Geometrie.

Aufgabe 4: "Autounfall" ("Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik 1" von A.Engel)

Vier Brüder hatten gleichzeitig den Führerschein erworben. Nach einem Jahr waren sie in 5 Unfälle verwickelt. Davon entfielen 4 auf den jüngsten Bruder Karl. Darauf kommt es zu folgendem Dialog zwischen Karl und seinem Vater:

Vater: Karl, du darfst den Wagen nicht mehr benutzen, du bist zu leichtsinnig!
Karl: Ich bin so gut wie meine Brüder. Ich hatte nur Pech.
..... Schülerdiskussion
Karl: Hier sind 4 Urnen und die 5 Unfälle sind Kugeln. Diese Kugeln wurdem von Zufall auf die 4 Urnen verteilt, und auf meine Urne entfielen 4 Kugeln.
Vater: Das ist sehr unwahrscheinlich!
Karl: Rechnen wir nach. Wenn die Wahrscheinlichkeit für ein so extremes Ergebnis kleiner als 2 % ist, dann will ich mich schuldig bekennen.
Vater: Und ich will dich freisprechen, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür größer als 6 % ist.

.... Schüler rechnen

Der Vater rechnet: 5 Kugeln kann man auf 4 Urnen auf 4^5 Arten verteilen. Extreme Verteilungen mit 4 oder 5 Kugeln in der ersten Urne gibt es 16. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist 1,56 %.

Vater: Also bekennst du dich schuldig?

Karl: In dieser Rechnung ist ein Vorurteil gegen mich eingebaut. Was mir passierte, hätte jedem der 3 anderen genauso passieren können. Du mußt das Ereignis betrachten, daß 4 oder 5 Kugeln in irgendeine der 4 Urnen fallen. Dafür gibt es 4-mal mehr günstige Fälle, die Wahrscheinlichkeit dafür ist 6,125 /. Also bin ich freigesprochen?

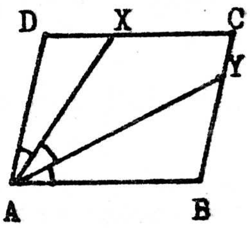
Wer hat recht?

Aufgabe 5: "Flächenteilung" ("Ein geometrisches Beispiel zum problemorientierten Unterricht" von H.Siemon in "Der Mathematikunterricht" 1976/Heft 3)

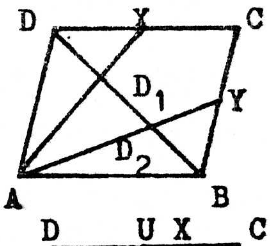
Ein beliebiges Parallelogramm (ABCD) soll von einem Eckpunkt A aus durch zwei Halbgerade in drei flächengleiche Teile zerlegt werden. Es sind also Punkte X und Y zu bestimmen, die auf den Strecken DC bzw. BC liegen, so daß F (AXD) = 1/3.F(ABCD) = = F(AYB), wobei jeweils mit F(Q) der Flächeninhalt eines einfachen Polygons bezeichnet wird.

Eine mögliche Einkleidung zu dieser Aufgabe wäre: Ein Farmer hinterläßt seinen drei Söhnen eine parallelogrammförmige Obstplantage ABCD, die in dem Punkt A eine Quelle besitzt. Das Testament bestimmt, daß jeder Sohn ein Drittel der Plantage erhalten und Zugang zur Quelle haben soll. Wie müssen geradlinige Zäune von A ausgehend angebracht werden, damit jeder Sohn zu seinem Recht kommt?

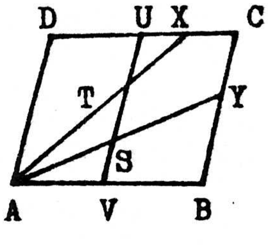
In Schulversuchen wurden von den Schülern folgende Lösungsvorschläge erarbeitet:



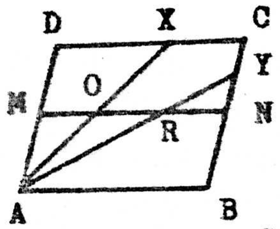
$\sphericalangle BAY = \sphericalangle YAX = \sphericalangle XAD$
(Winkel bei A dritteln)



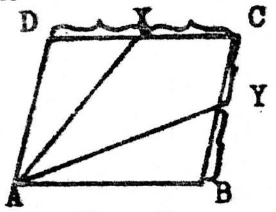
DB durch D_1 und D_2 dritteln!
$\{X\} = AD_1 \cap DC \quad \{Y\} = AD_2 \cap BC$



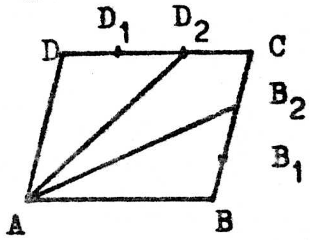
Mittelparallele UV wird durch T,S gedrittelt



Mittelparallele MN wird durch Q, R gedrittelt



$\overline{DX} = \overline{XC}$ $\overline{BY} = \overline{YC}$



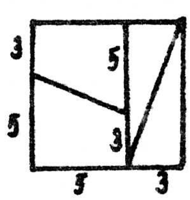
CD wird durch D_1, D_2 gedrittelt
BC wird durch B_1, B_2 gedrittelt

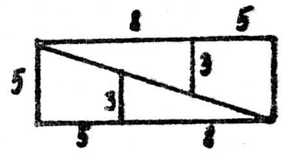
Die Aufgabe verführt zu vielen falschen Ansätzen, deren Klärung reaktivierend auf bereits vorhandene Kenntnisse wirkt oder für den Schüler neue Gesichtspunkte erschließt.

4. Provokation

Aufgabe 6: "Quadrat ⟶ Rechteck"

Ein Quadrat (8 cm × 8 cm) soll passend zerschnitten werden und die Teilstücke sollen zu einem Rechteck (13 cm × 5 cm) zusammengelegt werden.



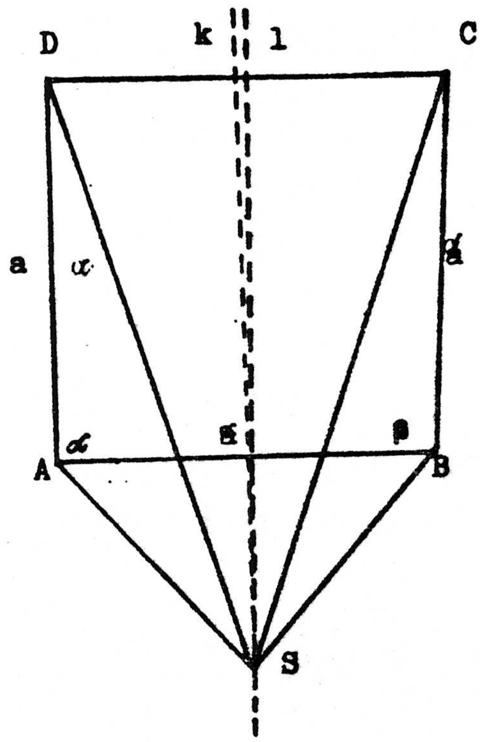


Wie groß ist der Flächeninhalt von Quadrat und Rechteck?
Von wo kommt das 1 cm^2?

Das Zusammensetzen zum Rechteck ist nur scheinbar möglich.

Beweis mit: Strahlensatz
oder Winkelfunktion
oder Analytische Geometrie

Aufgabe 7: "$90^\circ = 93^\circ$"



Voraussetzung:

1. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} = a$
2. $\sphericalangle\ BAD = \alpha = 90^\circ$
3. $\sphericalangle\ ABC = \beta = 93^\circ$
4. $k = s\ (A,B)$
5. $l = s\ (C,D)$
6. $k \cap l = \{S\}$

Behauptung: $\alpha = \beta$

Beweis:

1. $\overline{SA} = \overline{SB}$
2. $\overline{SC} = \overline{SD}$
3. $\Delta\ SAD = \Delta\ SBC$ (SSS-Satz)
4. $\sphericalangle\ SAD = \sphericalangle\ SBC$
5. $\sphericalangle\ SAB = \sphericalangle\ SBA$
6. $\alpha = \beta$

5. Phantasievolle Verfremdung:

Aufgabe 8: "Alexanders Schild"

Der Lehrer erzählt die folgende Geschichte: Alexander ist mit zahllosen Getreuen in Gefangenschaft geraten. Der Tyrann Balthasar will einen Gnadenerlaß geben. Alexander darf mit seinem Dolch auf einem kreisrunden Schild gerade Linien einritzen. Anschließend werden so viele Getreue freigelassen, wie Felder auf dem Schild entstanden sind.

Wieviele Getreue kann Alexander durch Einritzen von 8 geraden Linien höchstens befreien?
(später: Wie viele Getreue kann Alexander durch Einritzen von n geraden Linien höchstens befreien?)

Die Schüler werden erkennen, daß das Problem für 8 Linien kaum zeichnerisch zu lösen ist. Vielleicht versuchen sie es für weniger Linien. Sie müssen eine optimale Strategie entwickeln: Jede neue Gerade soll so viele Schnittpunkte besitzen, wie bereits Gerade vorhanden sind.

Damit erhält man eine Rekursionsformel:

$$F(n) = F(n-1) + n \quad \text{für} \quad n > 1 \text{ und } F(1) = 2$$

Diese Rekursionsformel ist bei großen n-Werten sehr umständlich. Wie lautet eine explizite Formel? Vermutungen der Schüler werden überprüft. Beweis mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 9: "Stellenwertsystem" ("Stellenwertsysteme-Einstiegs- und Anwendungsprobleme" von A.Witzel und R.Stowasser in "Der Mathematikunterricht" 1977/H.1)

Minimierung eines Gewichtsatzes:

Der Lehrer erscheint zum Unterricht mit einer Balkenwaage und einem herkömmlichen Gewichtsatz. Einige Gegenstände werden gewogen; die Schüler notieren sich die Gewichte für bestimmte Wägungen. Sie sehen schnell, daß man aus den Einzelgewichten 1,2,2,5,10,20,50,100g jedes Gewicht bis 210 g zusammensetzen kann. Geht nun ein Gewichtstein verloren - z.B. ein 2g-Stein - so lassen sich zunächst bestimmte Größen- hier 4g, 9g, 14g usw. - nicht mehr herstellen. Was ist zu tun? Schüler merken bestimmt, daß 4 nicht nur durch 2+2, sondern auch durch 5-1 dargestellt werden kann, und legen den 1g-Stein auf die andere Waagschale. Sofort taucht die Frage auf, ob jede Größe durch diesen Trick herzustellen ist; des weiteren, ob auch andere Steine verloren gehen dürfen, oder ob sogar mehrere Steine fehlen dürfen.

Diskussion: Wie findet man einen Gewichtssatz mit möglichst wenigen Gewichtsstücken?

$K(1) = 1 \qquad K(n+1) = 2.(K(1)+K(2)+...+K(n)) + 1$

$K(i) = 3^{i-1} \qquad 1 \leq i \leq n$

1,3,9,27,81,243,729,...

Die Merktafel des Goldschmiedes:

Ein Goldschmied, der mit unserem Gewichtsatz 1,3,9,... arbeitet und seine Legierungen selbst herstellt, muß häufig 585 g Gold und 415 g Kupfer wägen, ebensooft 333 g Gold und 667 g Kupfer, schließlich noch 900 g Silber und 100 g Zink. Er hat ein schlechtes Gedächtnis und ist ein noch schlechterer Kopfrechner, deshalb stellt er sich für diese gängigen Größen eine Gewichtstabelle her.

	729	243	81	27	9	3	1
585	r	l	r	r	l	o	o
415	r	l	l	o	r	o	r
333	o	r	r	o	r	o	o
667	r	o	l	r	l	o	r
900	r	r	l	o	r	o	o
100	o	o	r	r	l	o	r

Zusammenlegen von Gewichten:

Unser Goldschmied hat für seine Legierung eine bestimmte Masse Gold und eine bestimmte Masse Kupfer abgewogen. Seine Gewichte waren für Gold r r o r l, für Kupfer r l r l o. Nachdem die Legierung hergestellt ist, will er nachprüfen, ob beim Verschmelzen nichts verloren gegangen ist. Da er nur einen Gewichtssatz besitzt, beginnt eine langwierige Prozedur: Übersetzen der "Zahlen" ins Zehnersystem, Addition, Rückübersetzung.

Frage: Kann man die Gewichte nicht direkt bestimmen?

r r o r l + r l r l o = ?

Addition von Gegengewichten: führt zur Subtraktion:

Wegnahme eines Steines von der rechten Seite ≙
≙ Hinzufügen eines gleichgroßen Steines auf der linken Seite.

Substraktion von r r l o l entspricht Addition von l l r o r.
l l r o r ist <u>Gegengewicht</u> von r r l o r.

<u>Regel:</u> Man subtrahiert ein Gewicht (eine Zahl), indem man das Gegengewicht (die Gegenzahl) addiert.

<u>Beispiel:</u> r o l l - r o l = ?
↓Gegenzahl
r o l l + l o r = r l l o
daher: r o l l - r o l = r l l o

<u>Multiplikation:</u> Einkleidung: Masse Gold muß verdoppelt
verdreifacht
verzwanzigfacht werden.

<u>Beispiel:</u> r l o o r . 3 = r l o o r $\underline{o}$
r l o o r . 9 = r l o o r $\underline{o}$ $\underline{o}$
r l o o r . 27 = r l o o r $\underline{o}$ $\underline{o}$ $\underline{o}$
r l o o r . 20 = r l o o r . 27 - r l o o r . 9 +
\+ r l o o r . 3 - r l o o r =
= r l o o r o o o - r l o o r o o + r l o o r o -
\- r l o o r = r l o o r o o o + l r o o l o o +
\+ r l o o r o + l r o o l = r l l l l l r l

<u>r l o o r</u> . r l r l
r l o o r o o o — Addition
l r o o l o o - Subtraktion (Gegenzahl!)
r l o o r o — Addition
<u>l r o o l</u> - Subtraktion (Gegenzahl!)

r l l l l l r l

<u>Bemerkung:</u> Das Stellenwertsystem wird unabhängig vom Zehnersystem entwickelt.

II. Wertigkeit der Probleme

Außer der Beschaffenheit der Probleme spielt auch die Wertigkeit der Probleme eine entscheidende Rolle. Dieser zweite Block von Einstiegsmotivationen fußt auf dem "Nützlichkeitsprinzip":

Die Einstiegsprobleme sollen dem Schüler ein wie immer geartetes Gefühl des Bezuges auf seine Zukunft geben. Es sollte bei ihm der Eindruck entstehen, durch den Umgang mit dem Problem davon etwas zu haben.

Zur Anwendung im Mathematikunterricht möchte ich dreimal H.Freudenthal (aus "Mathematik als pädagogische Aufgabe") zitieren:

"Wenn wir wünschen, daß der Schüler die Mathematik auch anzuwenden lernt, so müssen wir es ihm erleichtern; wir sollen die Schranken, die die Mathematik umgeben, abbrechen. Wir sollen Mathematik so viel wie nötig in den anderen Wissenschaften anwenden, damit der Schüler das Anwenden lernt. Wir sollen ihm nicht Beziehungslosigkeit vorspiegeln, wenn wir wünschen, daß er die Beziehungen kennenlernt."

"Den Mathematiker möge ein freischwebendes System der Mathematik interessieren - für den Nichtmathematiker sind die Beziehungen zur erlebten Wirklichkeit unvergleichlich wichtiger."

"Wenn man sagt, man wisse nicht, wie der Schüler einmal die Mathematik anzuwenden habe, so ist es häufig eine Ausrede dafür, daß man selber nicht weiß, wie Mathematik angewandt wird."

Der Auftrag des Lehrplanes wäre eindeutig: "Bei der Einführung eines neuen Stoffgebietes sind als Ausgangspunkte nach Möglichkeit Probleme aus anderen Wissenschaften oder aus dem täglichen Leben zu wählen. Im Anschluß an motivierende Beispiele ist eine Formalisierung oder Exaktifizierung...."

<u>1. Anwendung</u>

In den folgenden Beispielen wird von realen Problemstellungen und nicht von abstrakten mathematischen Begriffen oder Verfahren ausgegangen.

<u>Aufgabe 10:</u> "Einführung der Winkelfunktionen" (aus "Mathematik Oberstufe 2" von Bürger, Fischer,Malle)

Begonnen wird mit einem konkreten Problem aus der Landvermessung. Es wird eine Standlinie festgelegt. Abstand und Winkelmaß werden mit Entfernungsmesser und Theodoliten gemessen, man erhält die Polarkoordinaten der Eckpunkte.

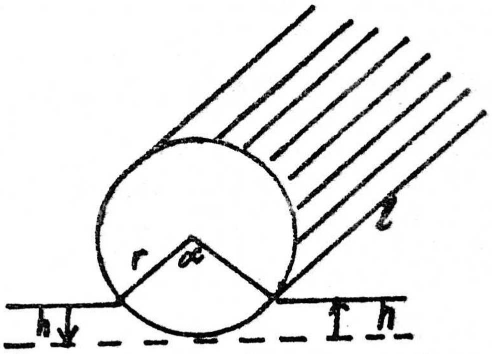
Wie kann man aus den Polarkoordinaten die cartesischen Koordinaten errechnen? Das Problem der Umrechnung führt uns (aus Gründen der Nützlichkeit) zur Einführung bzw. Definition des Cosinus und des Sinus.

Man sage nicht,"ja, sonst macht man es halt umgekehrt: man führt zuerst den Sinus ein und dann rechnet man eben Anwendungsbeispiele Die Reihenfolge ist es eben, die hier motiviert.

Aufgabe 11: "Schwimmender Baumstamm" (aus "Angewandte Mathematik" von G.Tischel)

Ein Baumstamm aus Basaltholz liegt im Wasser. Er hat annähernd die Form eines geraden Zylinders. Wie tief taucht der Baumstamm in das Wasser ein?

vereinfachtes Modell: Querschnitt kreisförmig
gerader Zylinder



G...Gewicht des Baumstammes
F...Gewicht des verdrängten Wasservolumens

G = F (Archimedes!)

Flächeninhalt des Kreissektors: $1/2 . r^2 . \alpha$
Flächeninhalt des Dreiecks: $1/2 . r^2 . \sin \alpha$
(α... Bogenmaß)

$F = (1/2 . r^2 . \alpha - 1/2 . r^2 . \sin \alpha) . \rho_W . g . l$

$G = r^2 . \pi . l . \rho_H . g$

$\rho_W = 1\ g/cm^3$

$\rho_H = 0{,}2\ g/cm^3$

$\frac{2\pi}{5} = \alpha - \sin \alpha \qquad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{r-h}{r}$

$F: x \rightarrow x - \sin x - \frac{2\pi}{5}$

Gesucht ist die Nullstelle dieser Funktion.

An dieser Stelle muß ein mathematisches Verfahren entwickelt werden: Halbierungsverfahren oder Sekantenverfahren (regula falsi) oder Newtonverfahren.

Ergebnis: $\alpha \approx 2{,}11$ rad (unabhängig von r!).
z.B.: r = 30 cm, h ≈ 15 cm.

Aufgabe 12: "Schuldgeschäft" (aus "Mathematik für Studienanfänger" von G.Tinhofer)

Jemand leiht sich 1000 S und zahlt diese samt den Zinsen in drei Monatsraten zu je 400 S zurück. Wie hoch ist bei diesem (für den Gläubiger sicher guten) Schuldgeschäft der Zinsfuß bei einer monatlichen Verzinsung?

unbekannter Zinsfuß:	x	
nach einem Monat:	1000.(1+x)	Schulden
	400	getilgt
	600+1000 x	Restschuld
nach zwei Monaten:	(600+1000x).(1+x)	Schulden
	400	getilgt
	$1000x^2+1600x+200$	Restschuld
nach drei Monaten:	$(1000x^2+1600x+200).(1+x)$	Schulden
	400	getilgt
	$1000x^3+2600x^2+1800x-200 = 0$	Restschuld

$x^3+2{,}6x^2+1{,}8x-0{,}2 = 0 \qquad x \approx 0{,}097\ (9{,}7\ \%)$

2. Querverbindung

Bei der Aufgabe 11 und den folgenden Aufgaben 13 und 14 spielt außer dem Anwendungsbezug auch die Querverbindung zu einem anderen Fach eine motivierende Rolle.

Aufgabe 13: "Kritische Temperatur" (aus "Mathematik für Studienanfänger" von G.Tinhofer)

Gedacht ist diese Aufgabe als motivierendes Einstiegsbeispiel für die immer noch sehr beliebten Kurvendiskussionen.

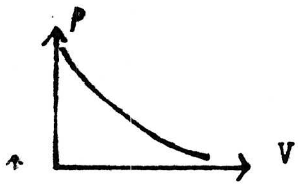
Zustandsgleichung für ideale Gase: $p.V=R.T$ (für 1 Mol)
$R=8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$

Bei idealen Gasen wird das endliche Volumen der Gasmoleküle vernachlässigt und die Anziehungskraft der Moleküle untereinander nicht berücksichtigt.

Für reale Gase hat nun Van der Waal die folgende Zustandsgleichung aufgestellt:

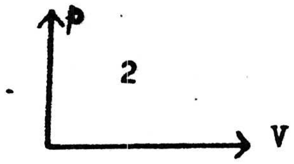
$$(p+\frac{a}{V^2}).(V-b) = R.T$$

	$a.10^4\ N.m^4$	$b.10^6 m^3$
O_2	1334	31,8
H_2O	5356	30,5
He	33,3	23,6



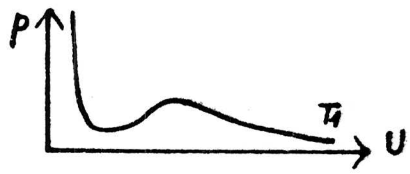
Wenn T=const.: ideal $p.V = const.$

real $p(V) = \frac{R.T}{V-b} - \frac{a}{V^2}$



Verhalten eines Gases bei niedriger Temperatur T_1:

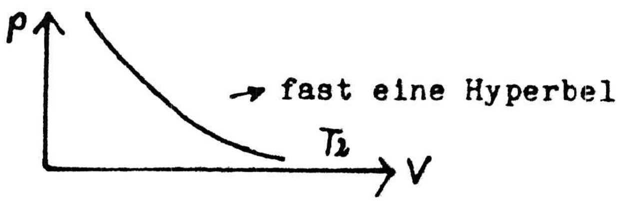
Bei Volumensverkleinerung reagiert das Gas zunächst mit einem Druckanstieg. Ist p groß genug, so setzt eine Verflüssigung des Gases ein. Der Druck sinkt wieder. Erst, wenn der Großteil des Gases verflüssigt ist, setzt ein weiterer Druckanstieg ein.



(Auch bei höheren Temperaturen ist noch derselbe Effekt zu beobachten. Allerdings wird mit steigender Temperatur der Unterschied zwischen Druckmaximum (relativ) und Druckminimum (relativ) immer kleiner. Auch rücken die Stellen, in denen die relativen Extremwerte angenommen werden, immer näher aneinander).

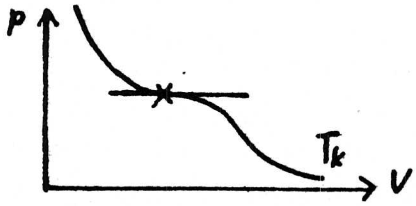
Verhalten eines Gases bei hoher Temperatur T_2:

Je größer die Temperatur, desto mehr verhält sich das Gas wie ein ideales Gas. $p.V = const.$



Es ist keine Verflüssigung möglich!

Verhalten eines Gases im Grenzfall (T_k = kritische Temperatur): "Höker" und "Mulde" sind gerade verschwunden. Es gibt nur mehr einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente.



daher $p'(V) = 0$

$\wedge$ $p''(V) = 0$!!

$$p'(V) = -\frac{R.T}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$$

$$p''(V) = \frac{2R.T}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4}$$

$$p'(V) = 0 \Leftrightarrow \frac{R.T}{(V-b)^2} = \frac{2a}{V^3}$$

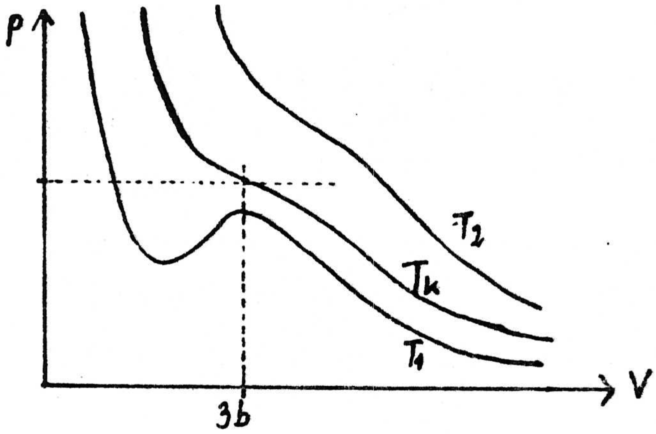
$$p''(V) = 0 \Leftrightarrow \frac{2R.T}{(V-b)^3} = \frac{6a}{V^4}$$

$$\Rightarrow V-b = \frac{2V}{3}$$

$$V_{krit} = 3b$$

$$T_{krit} = \frac{8a}{27bR}$$

$\frac{a}{27b^2}$



$T_1 < T_k < T_2$

Beispiel:

Helium $\quad a = 33,3.10^{-4}$ Nm^4

$b = 23,6.10^{-6}$ m^3

$R = 8,314$ $JK^{-1}mal^{-1}$

$\Rightarrow T_{krit} = 5^oK$

Schüler reagieren auf Motivierungsversuche sehr verschiedenartig. Es wäre daher völlig falsch, sich auf einzelne Motivierungsmöglichkeiten zu beschränken. Das Beispiel 14 soll Schüler ansprechen, die sonst mehr geisteswissenschaftlich oder musisch orientiert sind.

Aufgabe 14: "Der Spieler" von F.M.Dostojewski

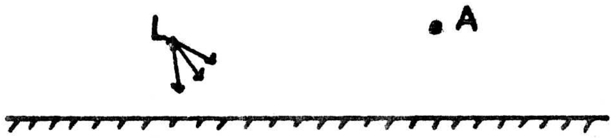
In der Novelle "Der Spieler" gibt es sehr anregende Beschreibungen des Roulettespiels. Die Novelle (vollständig im Deutschunterricht oder ausschnittweise im Mathematikunterricht gelesen) ist eine Einstiegsmöglichkeit für die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

3. Verallgemeinerungen

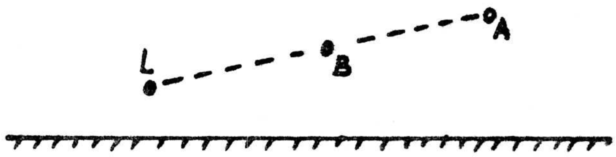
Untersuchungen haben gezeigt, daß Stoffe oder Informationen dann besonders motivierend wirken, wenn mit ihnen Verallgemeinerungen, Grundprinzipien, Exemplarisches oder weitere Anwendungsmöglichkeiten im Fach selber und außerhalb aufgezeigt werden.

Aufgabe 15: "Reflexion"

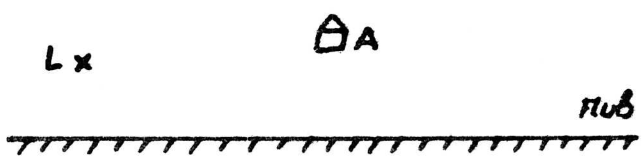
Problem A: Vom Punkt L gehen Lichtstrahlen aus. Sie werden an einem Spiegel reflektiert. Ein Strahl gelangt in das Auge A. Wo wird jener Lichtstrahl am Spiegel reflektiert? Es gilt das Reflexionsgesetz.



Problem B: Eine Billardkugel L soll die Kugel A stoßen. Da die Kugel B im Weg ist, muß L den Umweg über den Tischrand nehmen. Wo muß sie den Rang berühren?



Problem C: In A ist ein Feuer ausgebrochen. Der Helfer muß von L aus, auf kürzestem Weg, zum Fluß und dann nach A. (Auch hier wird das Reflexionsgesetz erfüllt!)



Die Probleme A und C können auf die "Brechung" erweitert werden.

4.Spiel

Das Spiel wirkt motivierend durch die notwendigerweise vorhandene Selbsttätigkeit des Spielers, durch die Möglichkeit, sich mit etwas Neuem zu beschäftigen, und durch das Erreichen einer Wirkung.

Das Spiel ist auch speziell für den Mathematikunterricht wichtig, weil spielerische Verhaltensweisen Eigenschaften aufweisen, wie sie auch höheren mathematischen Denkformen eigen sind. Es besteht eine spezielle Verwandtschaft zwischen Spiel und Axiomatik.

Auch hier schadet natürlich Einseitigkeit. Freudenthal warnt: "Das Spiel wird auf niedrigem Niveau gerne und mit Recht als Motivation beansprucht. Man verlasse sich aber auf das Spiel nicht. Eintagsspiele können erlebte Wirklichkeit nicht ersetzen. Die erlebte Wirklichkeit soll das Skelett sein, das die mathematischen Erlebnisse verbindet; Spiele, wie motivierend und reizvoll sie auch sein mögen, können das nicht ersetzen.

Aufgabe 16: "Rubikwürfel"

Durch ein ausgeklügeltes Achsensystem lassen sich die 26 Miniwürfel, aus denen er zusammengesetzt ist, verdrehen.

Der Würfel kann im Unterricht nicht nur als Modell für eine nichtkommutative Gruppe verwendet werden, er dient auch als Beispiel dafür, daß es für den Austausch von Informationen oder einer Strategie notwendig ist, eine gemeinsame Sprache mit genau definierten Begriffen zu entwickeln.

Aufgabe 17: "Der Turm von Hanoi"

Auf der Weltausstellung 1889 in Paris hatte der französische Mathematiker Lucas etliche mathematische Spiele ausgestellt. Darunter das Turmspiel: Sechs kreisförmige Scheiben sind der Größe nach auf einem der drei Stifte gestapelt. Ziel des Spiels ist es, den Turm auf einen der anderen Stifte umzubauen. Dabei müssen die Scheiben einzeln von einem Stift auf einen anderen umgelegt werden, ohne daß jemals eine größere Scheibe auf eine kleinere gelegt werden darf.

Uns interessiert die kleinste Anzahl der Umlegungen für den Umbau des Turmes nach den Spielregeln.
Verallgemeinerung: nicht 6 Scheiben, sondern n Scheiben!

Das Turmproblem bietet einen fast spielerischen Zugang zur vollständigen Induktion. Auf den ersten Blick wird es gewiß nicht durchschaut. Andererseits ist es elementar genug, um von Schülern bezwungen zu werden. Die Anzahl der Umlegungen bis zu 4 Scheiben läßt sich leicht durch Probieren feststellen. Beim Hantieren mit den Scheiben wird aber klar, daß die Antwort auf die entsprechende Anzahlfrage für Türme aus 20 oder mehr Scheiben sicher nicht durch Probieren gefunden werden kann. Man versucht daher, eine Strategie zu finden.

Rekursionsformel: $U(1) = 1 \quad U(n+1) = U(n).2+1$ für $n \geq 1$

Vermutung: $U(n) = 2^n - 1$

Beweis: durch vollständige Induktion

III. Unterrichtsmethode

Nicht nur die Herkunft der Probleme und nicht nur die Beschaffenheit der Probleme ist für die Motivation von großer Bedeutung, sondern auch die Art, wie die Schüler mit den Problemen konfrontiert werden und wie sie an den Problemen arbeiten. Es ist also auch die Unterrichtsmethode, die motivieren oder abschrecken kann.

Dazu das "Prinzip des aktiven Lernens" (nach E.Wittmann): "Der Lehrer sollte sich darüber im klaren sein, daß seine Instruktion wirkungslos bleibt, wenn sie nicht durch eine aktive Konstruktion seitens des Schülers ergänzt wird. Daher müssen Aktivitäten organisiert werden, die den Schüler in eine intensive Auseinandersetzung direkt mit den Gegenstand bringen. Die beschauliche Betrachtung von Lehrbüchern oder von Lehrervorträgen ist nutzlos."

Es genügt nicht, die Neugierde der Schüler zu wecken, man muß auch darauf achten, daß sie geweckt bleibt. Dies geschieht vor allem durch Selbsttätigkeit. Dazu ein Rückblick auf die besprochenen Aufgaben:

1 "Würfel von Efron": Schüler suchen Strategie und Begründung
2 "Tennismatch": Schüler argumentieren in Gruppen, welche der Alternativen günstiger ist
3 "Torschuß": Schüler stoßen selbst auf die Behauptung
4 "Führerschein": Schüler argumentieren in Gruppen
5 "Flächenteilung": Schüler stellen selbst Behauptungen auf, verwerfen sie, begründen sie
6 "Quadrat → Rechteck": Schüler setzen selbst das Rechteck zusammen
7 "$90^\circ = 93^\circ$": Schüler suchen den Fehler im Beweis
8 "Alexanders Schild": Schüler suchen Strategie und Formel
9 "Stellenwertsystem": Schüler suchen minimalen Gewichtssatz, stellen Zahlentafel auf, suchen Additionsregel usw.

Besonders deutlich steht bei der Aufgabe 18 die Methode im Vordergrund.

Aufgabe 18: "Ein Unterrichtsgespräch zu dem Satz Euklids über das Nichtabbrechen der Primzahlenreieh"

"Der antike Beweis für die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2". Zwei Unterrichtslehrgänge von Martin Wagenschein (nachzulesen in "Der Mathematikunterricht" 1962 Heft 4), entwickelt nach dem Prinzip des exemplarischen Lernens.

Mit der Durchführung eines solchen Lehrganges kann man meiner Meinung nach einige Schüler dazu bringen, sich intensiver mit der Mathematik zu beschäftigen, also ein Einstieg nicht in ein spezielles Kapitel der Mathematik, sondern überhaupt in die Mathematik.

Zitate aus dem Werk "Unterrichtsrezepte" von Jochen und Monika Grell, in dem vehement gegen die übliche Motivationspraxis im Unterricht Stellung bezogen wird:

"Die heute gängien Motivationstheorien mögen wissenschaftlich noch so interessant und brauchbar sein: als Interpretations- und Handlungsrezepte für Lehrer sind sie entweder unbrauchbar oder schädlich oder beides."

"Der erste große Fehler des Motivationsbegriffs ist, daß das Wort zur Zauberformel geworden ist, die beinahe alles bedeuten kann. Ein zweiter Fehler des Motivationskonzeptes ist die unselige Unterscheidung zwischen primärer und sekundärer Motivation. Diese Begriffsbildung transportiert den verwirrenden Aberglauben, daß man Motivationszustände bei Schülern entweder von außen einschalten kann oder aber, daß sie der einzelne Schüler von sich aus "innerlich" einschaltet - und daß man dieses innerliche Einschalten angeblich durch geschickte "Motivation" von außen anschalten kann."

"Der motivierende Stundeneinstieg ist ein Mythos. Er ist nur deswegen so lebendig, weil so viele Lehrer einen so starken Glauben an seine Wirksamkeit haben. Und dieser Glaube steckt sogar Theoretiker an."

"Verführungsunterricht! Lehrer bemühen sich, die Schüler durch irgendein eindrucksvolles Erlebnis, das sie meist an den Stundenbeginn zu legen versuchen, so stark zu motivieren, daß die Schüler gar nicht mehr merken, daß sie etwas lernen sollen und worum es sich genau handelt."

"Was wir kritisieren, ist, daß der Lehrer es absichtlich vermeidet, den Schülern reinen Wein einzuschenken, und zwar, weil er von zwei Annahmen oder Erwartungen ausgeht, nämlich erstens, daß der bloße Stoff als solcher für die Schüler abschreckend oder langweilig sein müsse, und zweitens, daß man deswegen verhindern müsse, daß die Schüler den unverkleideten Stoff zu Gesicht bekommen."

"Sie werden dabei feststellen, daß auf viele dieser Einstiege Namen wie die folgenden passen: Werbetrick, alberner oder lustiger Gag, Strohfeuer, Verführungsversuch, bewußtes Anlügen, Theaterspielen, vom Thema ablenken, Effekthascherei, absichtliches Zurückhalten von Informationen, Kindertümelei, umständlicher Umweg, Kinder nicht ernst nehmen, Rätselraten, Kinder hereinlegen oder in eine Falle locken, Köderungsversuche, den Unterrichtsstoff verzuckern, tarnen, verkleiden, etwas als wertvoll darstellen, was man selbst für wertlos hält usw. Auch, wenn diese Charakterisierung böswillig gewählt ist - sie bezeichnet präzise die Manipulationstendenzen in unseren Motivationsversuchen."

"Fassen wir unsere Kritik an den schulischen Motivationsgebräuchen zusammen. Die latente Funktion dieser Sitten besteht nicht darin, den Schülern das Lernen zu erleichtern, sondern den Lehrern das Unterrichten. Denn in Wirklichkeit geht es um dies: Man nimmt in Kauf, daß ein Unterrichtseinstieg nach dem Motivationsrezept den Schülern die Möglichkeit nimmt, sich bewußt <u>für</u> den Gegenstand zu engagieren, und tauscht dafür den Vorteil ein, daß gleichzeitig die Möglichkeiten der Schüler eingeschränkt werden, sich bewußt <u>dagegen</u> zu entscheiden. Denn Schüler können nur schlecht etwas ablehnen, von dessen Existenz sie gar nicht wissen, oder das sie nur nebelhaft wahrnehmen."

Die Grell stellen dem motivierenden Einstieg den informierenden Einstieg gegenüber.

L I T E R A T U R

Zitate aus:

H. Roth	"Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens" Hannover 1970
H.Heckhausen	in Funk-Kolleg "Pädagogische Psychologie 1" Frankfurt am Main 1974
G.Rosenfeld	"Theorie und Praxis der Lernmotivation" Berlin 1975
D.Raufuß	"Materialien zur Planung des Unterrichts in Mathematik und Physik", Frankfurt am Main 1975
D.P.Ausubel	"Psychologie des Unterrichts" Weinheim 1974
H.Freudenthal	"Mathematik als pädagogische Aufgabe 1" Stuttgart 1973
E.Wittmann	"Grundfragen des Mathematikunterrichts" Braunschweig 1975
K.Strunz	"Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht", Braunschweig 1971
J.u.M.Grell	"Unterrichtsrezepte" München 1979

Beispiele aus:

A.Engel	"Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik 1" Stuttgart 1973
H.Siemon	"Ein geometrisches Beispiel zum problemorientierten Unterricht" in "Der Mathematikunterricht" 1976 Heft 3
A.Witzel u. R.Stowasser	"Stellenwertsysteme - Einstiegs- und Anwendungsprobleme" in "Der Mathematikunterricht" 1977/H1
Bürger-Fischer-Malle	"Mathematik Oberstufe 2" Wien 1979
G.Tischel	"Angewandte Mathematik" Frankfurt am Main 1980
G.Tinhofer	"Mathematik für Studienanfänger" München 1979
M.Wagenschein	Aufsätze in "Der Mathematikunterricht"19 62/H4

Dr.Peter Awecker
Universität Innsbruck